التكامل

تمارين مميزة لقاعدة $\int \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\, dx$

$\int \frac{1}{x.\ln x} dx$	$\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$	$\int \frac{2}{e^x+1} dx$	$\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$	$\int \cot x\, dx$	$\int \tan x\, dx$	$\int \frac{1}{\sin 2x} dx$

تمارين مميزة لقاعدة $\int \grave{H}(x).H^r(x)\, dx$

$\int \sin x \,.\, \sin 2x\, dx$	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$	$\int \frac{1}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}} dx$	$\int \frac{4x+8}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx$	$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} dx$	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$
$\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$	$\int \frac{x+\ln x}{x} dx$	$\int \frac{1+\ln x}{x} dx$	$\int \frac{\ln x}{x} dx$			

تمارين مميزة لقاعدة التكامل بالتجزئة $\int u(x).\grave{v}(x)\, dx$

$\int e^x \sin x\, dx$	$\int e^x \cos x\, dx$	$\int \frac{1}{x^2} \ln x\, dx$	$\int x.e^x\, dx$	$\int x \cos x\, dx$	$\int x \sin x\, dx$	$\int x\, \ln x\, dx$	$\int \ln x\, dx$

تكامل كسر
يأتي في إحدى الحالات

$\frac{\grave{g}}{g}$	درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام.
تفريق كسور	درجـة البسـط أصـغر تمامـاً مـن درجـة المقـام ولا تتحقـق القاعـدة $\frac{\grave{g}}{g}$ عندئـذ نلجـأ إلى تفريق الكسور.
يؤول إلى $\grave{H}.H^r$	المقـام يحـوي جـذر نـتخلص مـن الجـذر ونرفـع المقـام للبسـط مـع تغيـر إشـارة الأس وتـؤول إلى $\grave{H}.H^r$.

تكامل جداء
يأتي في إحدى الحالات

$\grave{H}.H^r$	تكامل بالتجزئة

يستخدم التكامل بالتجزئة في إحدى الأشكال

$\int x^m.\sin(\infty x)\,dx$ $\int x^m.\cos(\infty x)\,dx$ $\int x^m.e^{\infty x}\,dx$	نفرض $u(x)=x^m$
$\int x^m.\ln x\,dx \rightarrow$	نفرض $u(x)=\ln x$

ملاحظة (1): في تكاملات الدوال المثلثية لا تنسى قوانين المثلثات الأساسية وهي:

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$
$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$
$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$1+\cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

ملاحظة (2): تكامل جداء نسبتين مثلثيتين من الدرجة الأولى مختلفتين بالزاوية من الشكل:

$\int \sin ax\,.\sin bx\;dx$ $: a\neq b$	$\int \sin ax\,.\cos bx\;dx$ $: a\neq b$	$\int \cos ax\,.\sin bx\;dx$ $: a\neq b$	$\int \cos ax\,.\cos bx\;dx$ $: a\neq b$

عندئذ نلجأ إلى التحويل من جداء إلى مجموع حسب القوانين:

$\sin a\,.\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$
$\cos a\,.\sin b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$
$\cos a\,.\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$
$\sin a\,.\sin b = \dfrac{-1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

اوجد التابع الأصلي لكل تابع مما يلي :

1

$$f(x) = \cos^2 x$$

$$= \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$= \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

2

$$f(x) = \cos^3 x$$

$$= \cos^2 x . \cos x = (1 - \sin^2 x).\cos x$$

$$= \cos x - \underbrace{\cos x}_{H} \, \underbrace{\sin^2 x}_{H'}$$

$$F(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

$$f(x) = \sin^3 x$$

$$= \sin^2 x . \sin x = (1 - \cos^2 x).\sin x$$

$$= \sin x + \underbrace{(-\sin x)}_{H} . \underbrace{\cos^2 x}_{H'}$$

$$F(x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

3

$$f(x) = \cos^4 x$$

$$f(x) = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$f(x) = \sin^4 x$$

$$f(x) = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right]$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$F(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

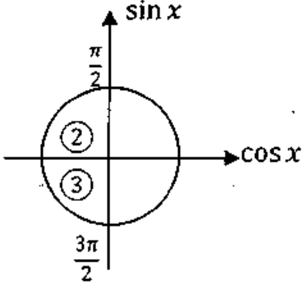
4

$$f(x) = \tan x \quad : \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= -\frac{-\sin x}{\cos x}$$

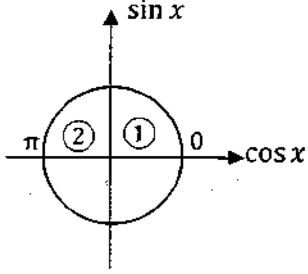
$$F(x) = -\ln(-\cos x) + c$$



$$f(x) = \cot x \quad : \left]0, \pi\right[$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$F(x) = \ln(\sin x) + c$$



5

$$f(x) = \tan^2 x$$

$$= \underbrace{1 + \tan^2 x} - 1$$

$$F(x) = \tan x - x + c$$

$$f(x) = \cot^2 x$$

$$= \underbrace{1 + \cot^2 x} - 1$$

$$F(x) = -\cot x - x + c$$

6

$$f(x) = \cos 4x \,.\, \sin 3x$$

لا نعلم جداؤهما

نعلمها   نعلمها

لذلك نحول من جداء إلى مجموع:

$$= \frac{1}{2}[\sin 7x - \sin x]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}\cos 7x + \cos x\right] + c$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin 2x} \quad : x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(-\sin x)}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(-\ln|\cos x| + \ln|\sin x|) + c$$

$$= \frac{1}{2}(-\ln(\cos x) + \ln(\sin x)) + c$$